**Problema 1**

Un cultivo de bacterias crece con una tasa de crecimiento relativo constante. Después de 2 horas existen 400 bacterias y después de 6 horas la cuenta es de 25 600.

La función que describe el crecimiento exponencial es:

N(t) = N₀ \* e^(rt)

donde:

- N(t) es el número de bacterias en el tiempo t (horas),

- N₀ es el número inicial de bacterias,

- r es la tasa de crecimiento relativa,

- t es el tiempo en horas.

**a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativa? Exprese su respuesta en porcentaje.**

Se tiene que:

N(2) = 400

N(6) = 25600

Sustituimos en la fórmula:

N(6) = N(2) \* e^{r(6 - 2)}

25600 = 400 \* e^{4r}

Dividiendo ambos lados entre 400:

e^{4r} = 25600 / 400 = 64

Aplicando logaritmo natural:

4r = ln(64)

4r = ln(2^6) = 6 ln(2)

r = (6 ln(2)) / 4 = (3 ln(2)) / 2

Aproximando:

ln(2) ≈ 0.6931

r ≈ (3 \* 0.6931) / 2 ≈ 1.0397

La tasa de crecimiento relativa es aproximadamente 1.0397, lo cual equivale a 103.97 por ciento.

**b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?**

Usamos el valor de r y el dato de N(2):

N(2) = N₀ \* e^{2r}

400 = N₀ \* e^{2 \* 1.0397} = N₀ \* e^{2.0794}

Calculamos:

e^{2.0794} ≈ 7.993

N₀ ≈ 400 / 7.993 ≈ 50.03

Por lo tanto, el tamaño inicial del cultivo es aproximadamente 50 bacterias.

**c) Encuentre una expresión para el número de bacterias después de t horas.**

Con N₀ ≈ 50 y r ≈ 1.0397:

N(t) = 50 \* e^{1.0397t}

d) Encuentre el número de bacterias después de 4.5 horas.

Usamos la expresión:

N(4.5) = 50 \* e^{1.0397 \* 4.5} = 50 \* e^{4.67865}

Calculamos:

e^{4.67865} ≈ 107.87

N(4.5) ≈ 50 \* 107.87 ≈ 5393.5

Por lo tanto, después de 4.5 horas hay aproximadamente 5394 bacterias.

**e) Encuentre la tasa de crecimiento después de 4.5 horas**.

La tasa de crecimiento instantánea es la derivada de N(t):

N'(t) = d/dt [50 \* e^{1.0397t}] = 50 \* 1.0397 \* e^{1.0397t}

Evaluamos en t = 4.5:

N'(4.5) = 50 \* 1.0397 \* e^{4.67865}

N'(4.5) ≈ 50 \* 1.0397 \* 107.87 ≈ 559.3

La tasa de crecimiento en t = 4.5 es aproximadamente 559 bacterias por hora.

**f) ¿Cuándo alcanzará la población 50 000?**

Queremos encontrar t tal que:

N(t) = 50000 = 50 \* e^{1.0397t}

Dividimos entre 50:

e^{1.0397t} = 1000

Aplicamos logaritmo natural:

1.0397t = ln(1000) = 6.9078

Despejamos t:

t = 6.9078 / 1.0397 ≈ 6.64

Por lo tanto, la población alcanzará 50000 bacterias aproximadamente a las 6.64 horas.

**Problema 2**

Un habitante común del intestino humano es la bacteria Escherichia coli. Una célula de esta bacteria en un caldo nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 60 células.

La función que describe el crecimiento exponencial es:

N(t) = N₀ \* e^{rt}

donde:

- N(t) es el número de células en el tiempo t (en horas),

- N₀ es la población inicial,

- r es la tasa de crecimiento relativa,

- t es el tiempo en horas.

**a) Halle la tasa de crecimiento relativa.**

Sabemos que la población se duplica cada 20 minutos. Esto equivale a 1/3 de hora (20 minutos = 1/3 hora).

Entonces:

N(1/3) = 2 \* N₀ = N₀ \* e^{r \* (1/3)}

Dividimos ambos lados entre N₀:

2 = e^{r/3}

Aplicamos logaritmo natural:

ln(2) = r/3

r = 3 \* ln(2)

Aproximamos:

ln(2) ≈ 0.6931

r ≈ 3 \* 0.6931 ≈ 2.0794

Por lo tanto, la tasa de crecimiento relativa es aproximadamente 2.0794 por hora.

**b) Encuentre una expresión para el número de células después de t horas.**

Con N₀ = 60 y r ≈ 2.0794:

N(t) = 60 \* e^{2.0794t}

**c) Calcule el número de células después de 8 horas.**

Usamos la expresión:

N(8) = 60 \* e^{2.0794 \* 8} = 60 \* e^{16.6352}

Calculamos:

e^{16.6352} ≈ 1.6736 \* 10^7

N(8) ≈ 60 \* 1.6736 \* 10^7 ≈ 1.0042 \* 10^9

Por lo tanto, después de 8 horas hay aproximadamente 1 004 200 000 células.

**d) Establezca la tasa de crecimiento después de 8 horas**.

La tasa de crecimiento instantánea es:

N'(t) = d/dt [60 \* e^{2.0794t}] = 60 \* 2.0794 \* e^{2.0794t}

Evaluamos en t = 8:

N'(8) = 60 \* 2.0794 \* e^{16.6352}

N'(8) ≈ 60 \* 2.0794 \* 1.6736 \* 10^7 ≈ 2.089 \* 10^9

Por lo tanto, la tasa de crecimiento después de 8 horas es aproximadamente 2 089 000 000 células por hora.

**e) ¿Cuándo alcanzará la población 20 000 células?**

Queremos encontrar t tal que:

N(t) = 20000 = 60 \* e^{2.0794t}

Dividimos entre 60:

e^{2.0794t} = 20000 / 60 ≈ 333.33

Aplicamos logaritmo natural:

2.0794t = ln(333.33) ≈ 5.8101

Despejamos t:

t = 5.8101 / 2.0794 ≈ 2.794

Por lo tanto, la población alcanzará las 20000 células aproximadamente a las 2.79 horas.

**Problema 3**

Un cultivo de bacterias al inicio contiene 100 células y crece en una cantidad proporcional a su tamaño. Después de 1 hora la población se ha incrementado a 420.

La función que describe el crecimiento exponencial es:

N(t) = N₀ \* e^{rt}

donde:

- N(t) es el número de bacterias al tiempo t (en horas),

- N₀ es la población inicial,

- r es la tasa de crecimiento relativa,

- t es el tiempo en horas.

**a) Establezca una expresión para el número de bacterias después de t horas.**

Se sabe que:

N₀ = 100

N(1) = 420

Usamos estos datos para encontrar r:

N(1) = 100 \* e^{r}

420 = 100 \* e^{r}

Dividimos ambos lados entre 100:

e^{r} = 4.2

Aplicamos logaritmo natural:

r = ln(4.2) ≈ 1.4351

Entonces, la expresión para el número de bacterias es:

N(t) = 100 \* e^{1.4351t}

**b) Calcule el número de bacterias después de 3 horas.**

Usamos la expresión:

N(3) = 100 \* e^{1.4351 \* 3} = 100 \* e^{4.3053}

Calculamos:

e^{4.3053} ≈ 74.06

N(3) ≈ 100 \* 74.06 ≈ 7406

Por lo tanto, después de 3 horas hay aproximadamente 7406 bacterias.

**c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 3 horas.**

La tasa de crecimiento instantánea es:

N'(t) = d/dt [100 \* e^{1.4351t}] = 100 \* 1.4351 \* e^{1.4351t}

Evaluamos en t = 3:

N'(3) = 100 \* 1.4351 \* e^{4.3053} ≈ 100 \* 1.4351 \* 74.06 ≈ 1062.3

Por lo tanto, la tasa de crecimiento después de 3 horas es aproximadamente 1062 bacterias por hora.

**d) ¿Cuándo alcanza la población 10 000?**

Queremos encontrar t tal que:

N(t) = 10000 = 100 \* e^{1.4351t}

Dividimos entre 100:

e^{1.4351t} = 100

Aplicamos logaritmo natural:

1.4351t = ln(100) = 4.6052

Despejamos t:

t = 4.6052 / 1.4351 ≈ 3.21

Por lo tanto, la población alcanza las 10 000 bacterias aproximadamente a las 3.21 horas.

**Problema 4**

El tiempo de vida media del cesio-137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 100 mg.

La desintegración radiactiva se modela con la función exponencial:

M(t) = M₀ \* e^{-rt}

donde:

- M(t) es la masa restante en el tiempo t (en años),

- M₀ es la masa inicial,

- r es la constante de desintegración,

- t es el tiempo en años.

**a) Establezca la masa que permanece después de t años.**

Sabemos que:

M(30) = M₀ / 2 = 100 / 2 = 50

Entonces:

50 = 100 \* e^{-30r}

Dividimos ambos lados entre 100:

0.5 = e^{-30r}

Aplicamos logaritmo natural:

ln(0.5) = -30r

-0.6931 = -30r

r = 0.6931 / 30 ≈ 0.0231

La función queda:

M(t) = 100 \* e^{-0.0231t}

**b) ¿Cuánto de la muestra permanece después de 100 años?**

Usamos la expresión:

M(100) = 100 \* e^{-0.0231 \* 100} = 100 \* e^{-2.31}

Calculamos:

e^{-2.31} ≈ 0.0995

M(100) ≈ 100 \* 0.0995 ≈ 9.95

Por lo tanto, después de 100 años permanecen aproximadamente 9.95 mg de cesio-137.

**c) ¿Después de cuánto tiempo permanece únicamente 1 mg?**

Queremos encontrar t tal que:

M(t) = 1 = 100 \* e^{-0.0231t}

Dividimos entre 100:

0.01 = e^{-0.0231t}

Aplicamos logaritmo natural:

ln(0.01) = -0.0231t

-4.6052 = -0.0231t

Despejamos t:

t = 4.6052 / 0.0231 ≈ 199.4

Por lo tanto, solamente permanecerá 1 mg de cesio-137 después de aproximadamente 199.4 años.

**Problema 5**

De un horno se toma un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 185 °F y se coloca sobre una mesa en un espacio donde la temperatura es de 75 °F.

El enfriamiento se modela con la Ley de Enfriamiento de Newton:

T(t) = Tₐ + (T₀ - Tₐ) \* e^{-kt}

donde:

- T(t) es la temperatura del objeto en el tiempo t (en horas),

- Tₐ es la temperatura ambiente (75 °F),

- T₀ es la temperatura inicial del objeto (185 °F),

- k es la constante de enfriamiento,

- t es el tiempo en horas.

**a) Si la temperatura del pavo es 150 °F después de media hora, ¿cuál es la temperatura 45 minutos después?**

Se conoce:

Tₐ = 75

T₀ = 185

T(0.5) = 150

Sustituimos en la fórmula para encontrar k:

150 = 75 + (185 - 75) \* e^{-k \* 0.5}

150 = 75 + 110 \* e^{-0.5k}

Restamos 75:

75 = 110 \* e^{-0.5k}

e^{-0.5k} = 75 / 110 ≈ 0.6818

Aplicamos logaritmo natural:

-0.5k = ln(0.6818) ≈ -0.3834

k = 0.3834 / 0.5 ≈ 0.7668

Entonces, la fórmula es:

T(t) = 75 + 110 \* e^{-0.7668t}

Calculamos T(0.75):

T(0.75) = 75 + 110 \* e^{-0.7668 \* 0.75} = 75 + 110 \* e^{-0.5751}

Calculamos:

e^{-0.5751} ≈ 0.5627

T(0.75) ≈ 75 + 110 \* 0.5627 ≈ 75 + 61.9 ≈ 136.9

Por lo tanto, la temperatura del pavo a los 45 minutos es aproximadamente 136.9 °F.

**b) ¿Cuándo se enfriará el pavo a 100 °F?**

Queremos encontrar t tal que:

T(t) = 100 = 75 + 110 \* e^{-0.7668t}

Restamos 75:

25 = 110 \* e^{-0.7668t}

Dividimos entre 110:

e^{-0.7668t} = 25 / 110 ≈ 0.2273

Aplicamos logaritmo natural:

-0.7668t = ln(0.2273) ≈ -1.4816

t = 1.4816 / 0.7668 ≈ 1.93

Por lo tanto, el pavo alcanzará los 100 °F aproximadamente a las 1.93 horas, es decir, en 1 hora y 56 minutos.

**Problema 6**

Si se invierten 3 000 dólares a 5% de interés, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto:

La fórmula para interés compuesto es:

A(t) = P \* (1 + r/n)^{nt}

donde:

- A(t) es el monto al cabo de t años,

- P es el capital inicial,

- r es la tasa de interés anual (en decimal),

- n es el número de períodos de capitalización por año,

- t es el tiempo en años.

También, si el interés es compuesto de manera continua, se usa:

A(t) = P \* e^{rt}

Datos:

P = 3000

r = 0.05

t = 5

**i) Composición anual (n = 1)**

A = 3000 \* (1 + 0.05/1)^{1\*5} = 3000 \* (1.05)^5

(1.05)^5 ≈ 1.2763

A ≈ 3000 \* 1.2763 ≈ 3828.90

**ii) Composición semestral (n = 2)**

A = 3000 \* (1 + 0.05/2)^{2\*5} = 3000 \* (1.025)^{10}

(1.025)^10 ≈ 1.2801

A ≈ 3000 \* 1.2801 ≈ 3840.30

**iii) Composición mensual (n = 12)**

A = 3000 \* (1 + 0.05/12)^{12\*5} = 3000 \* (1.0041667)^{60}

(1.0041667)^60 ≈ 1.2837

A ≈ 3000 \* 1.2837 ≈ 3851.10

**iv) Composición semanal (n = 52)**

A = 3000 \* (1 + 0.05/52)^{52\*5} = 3000 \* (1.0009615)^{260}

(1.0009615)^260 ≈ 1.2849

A ≈ 3000 \* 1.2849 ≈ 3854.70

v) Composición diaria (n = 365)

A = 3000 \* (1 + 0.05/365)^{365\*5} = 3000 \* (1.00013699)^{1825}

(1.00013699)^1825 ≈ 1.2840

A ≈ 3000 \* 1.2840 ≈ 3852.00

vi) Composición continua

A = 3000 \* e^{0.05 \* 5} = 3000 \* e^{0.25}

e^{0.25} ≈ 1.2840

A ≈ 3000 \* 1.2840 ≈ 3852.00

**b) Si A(t) es la cantidad de la inversión al tiempo t para el caso de composición continua, establezca una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga A(t).**

La ecuación diferencial para crecimiento compuesto continuo es:

dA/dt = r \* A

Con la condición inicial:

A(0) = 3000